BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2020

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 4

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

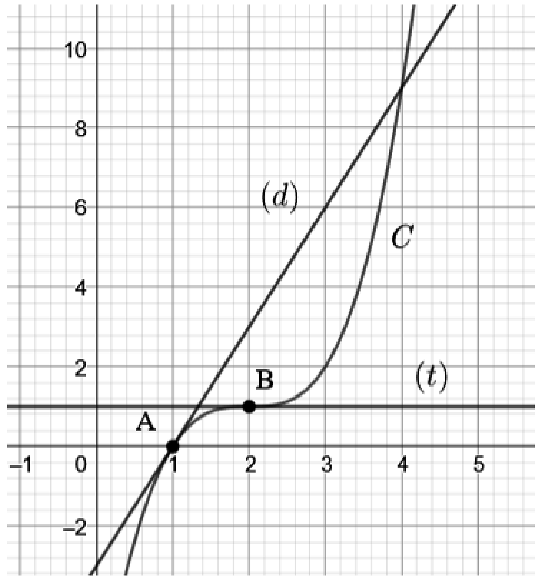
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1 (4 points) : commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Seules les affirmations 1, 2 et 3 s'appuient sur la figure ci-contre dans laquelle :

- la courbe C représente une fonction g définie et strictement croissante sur **R**,
- le point A est le point de la courbe C d'abscisse 1 et le point B celui d'abscisse 2,
- la droite (d) est la tangente à la courbe C au point A.
- la tangente (t) à la courbe C au point B est horizontale.



Affirmation 1

$g'(1) = 0$

Affirmation 2

Toute primitive de la fonction g est strictement croissante sur [0;3].

Affirmation 3

Le point B est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction g.

Affirmation 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur **R**, d'expression $f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$.

La fonction dérivée de f notée f' est définie sur **R** par $f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

Les parties de cet exercice sont indépendantes.

Le syndrome d'apnée du sommeil se manifeste par des interruptions répétées de la respiration pendant le sommeil. Ce syndrome peut être dû à plusieurs facteurs.

Partie A

Sauf indication contraire, les résultats numériques seront approchés à 10^{-4} près.

Dans cette partie, on cherche à étudier le lien entre le surpoids et le syndrome d'apnée du sommeil dans une population donnée.

Parmi les personnes participant à l'étude, 41 % sont en surpoids.

On observe que parmi les individus en surpoids, 12 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 4 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil.

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et p(E) sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude, et on note :

- S l'évènement : « la personne est en surpoids » ;
- A l'évènement : « la personne souffre d'apnée du sommeil ».

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en surpoids et souffre d'apnée du sommeil.
3. Montrer que p(A) = 0,0728. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome d'apnée du sommeil. Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier d'un patient souffrant d'apnée du sommeil.

Pendant plusieurs nuits, on observe son rythme respiratoire au cours de son sommeil. Ces examens permettent d'établir que la durée, en seconde, des apnées de ce patient peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 22$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(14 \leqslant D \leqslant 30)$.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Calculer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de la probabilité qu'une apnée de ce patient dure plus de 30 secondes.

Partie C

Une entreprise d'équipement médical commercialise un dispositif de ventilation en pression positive continue. Ce dernier permet de maintenir ouvertes les voies respiratoires du patient, prévenant ainsi les apnées du sommeil.

L'entreprise affirme que 91 % des patients qui utilisent le dispositif ressentent une amélioration de la qualité de leur sommeil.

Une étude est menée sur 348 patients auxquels on fait tester le dispositif. Après plusieurs nuits, 290 personnes déclarent avoir ressenti une amélioration de la qualité de leur sommeil.

Peut-on remettre en cause l'affirmation de l'entreprise d'équipement médical ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points) : candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année (2017+n). On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 180$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
   - **b.** Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.
   - **c.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -450 \times 0{,}8^n + 900$.

4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois ?

6. La direction du magazine s'engage à verser chaque année 1 euro par abonnement à une association caritative.

On dispose de l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 450
S ← 450
Pour I allant de 1 à N
        U ← 0,8*U+180
        S ← S+U
Fin Pour
```

On affecte 3 à la variable N et on exécute l'algorithme.

a. Après l'exécution, quelle valeur numérique contient la variable S ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points) : commun à tous les candidats

On étudie l'évolution du taux de natalité d'une population entre 1750 et 1870.

On admet que le taux de natalité peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 120] par :

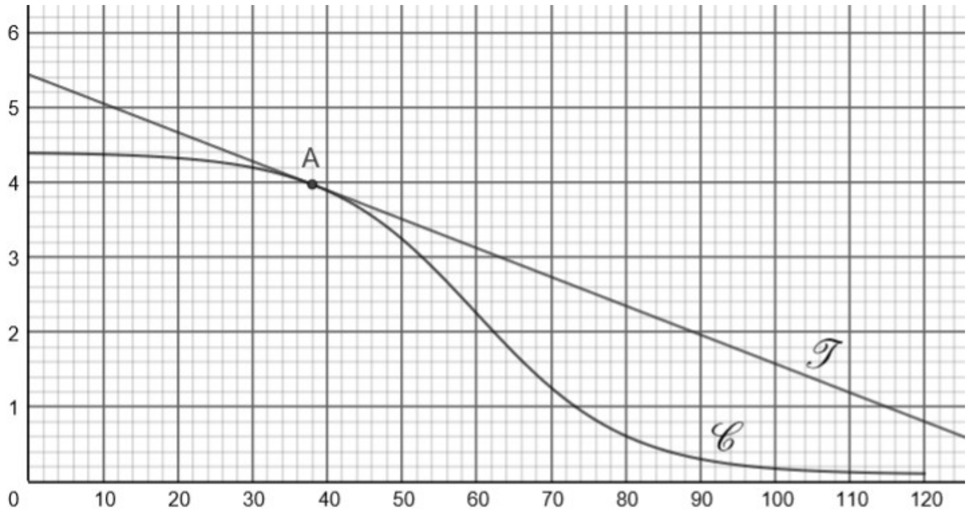
$$f(x) = 0{,}1 + \frac{4{,}3}{1 + e^{0{,}1x-6}}$$

où :

- x représente le temps, exprimé en années, écoulé depuis 1750,
- $f(x)$ représente le taux de natalité, exprimé en pourcentage, de la population totale.

On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ; 120] et on note f' sa fonction dérivée.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f, et la droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 38.



Partie A

1. Avec la précision permise par le graphique :

a. Donner une valeur approchée de $f'(38)$.

b. Recopier, parmi les propositions suivantes, celle qui est exacte :

$$7 \leqslant \int_{10}^{30} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8 \qquad 130 \leqslant \int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 190 \qquad 700 \leqslant \int_{80}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 800 .$$

2.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 120] :

$$f'(x) = -\frac{0{,}43\mathrm{e}^{0,1x-6}}{(1 + \mathrm{e}^{0,1x-6})^2} .$$

b. Retrouver le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 120].

3.

a. Justifier que sur l'intervalle [0 ; 120], l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on appelle α.

b. Encadrer α par deux entiers consécutifs.

Partie B

1. On admet que sur l'intervalle [0 ; 120], la fonction g d'expression $g(x) = \dfrac{4{,}3}{1 + \mathrm{e}^{0{,}1x-6}}$ a pour primitive la fonction G d'expression $G(x) = -43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0{,}1x+6}\right)$.

a. Donner une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 120].

b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer le taux de natalité moyen entre 1780 et 1870. On en donnera une valeur approchée à 0,01 % près.