UNION DES COMORES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Epreuve : ***Mathématiques***

Examen : **Baccalauréat**

Session : 2024

Série :	A1	A2	A4	C	Nbr pages :	2
Coeff. :				5	Durée :	4

Exercice 1 : *(5pts)*

$ABCD$ est un carré direct de centre O. (Δ) est la droite passant par A et parallèle à la droite (BD).

On note : $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et S_A la symétrie centrale de centre A.

On considère la transformation f définie par $f = S_{(BD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$

1- a) Faire une figure.

b) Montrer que f est un antidéplacement.

2- a) Montrer que $f = S_{(BD)} \circ S_A$ puis que $S_A = S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$.

b) En déduire que $f = S_{(BD)} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$

c) Justifier que : $S_{(BD)} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AC}}$ puis que $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$.

d) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Déterminer l'image du point A par f puis justifier que si $B' = f(B)$ et $D' = f(D)$;

alors $mes(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CD'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2 : *(4pts)*

Dans un système de numération de base n ; on considère les nombres $\alpha = \overline{220}$; $\beta = \overline{122}$ et $\mu = \overline{120010}$

1- a) Sachant que $\mu = \alpha \times \beta$; montrer que n divise 3 . Déduisez –en la valeur de n.

b) Justifier que dans le système décimal ; $\alpha = 24$ et $\beta = 17$.

2- a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide ; justifier que α et β sont premiers entre eux.

b) Vérifier que le couple $(x_0 ; y_0) = (5 ; 7)$ est une solution particulière de l'équation $(E) : \alpha x - \beta y = 1$.

c) Déterminer tous les couples solutions entiers de l'équation (E).

Problème : *(11pts)*

Soit n un entier naturel non nul. (C_n) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ de la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} \ln(x) & si \quad x \succ 0 \end{cases}$.

***Partie A** : Etude d'une fonction auxiliaire*

Pour tout entier naturel n non nul ; On considère la fonction g_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g_n(x) = x + n\ln(x)$$

1- a) Calculer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée $g'_n(x)$ de g_n , puis dresser son tableau de variation.

2- a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n sur $]0;+\infty[$.

b) Etudier suivant les valeurs x le signe de g_n sur $]0;+\infty[$.

3- a) Justifier que $\forall n \in IN^*$; $0 \prec \alpha_n \prec 1$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\ln(\alpha_n)$.

c) En déduire le sens de variation de la suite (α_n).

d) Justifier que la suite (α_n) converge vers un réel L.

e) Montrer que les égalités suivantes : $\forall n \in IN^*$; $\ln(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n}$ *puis* $\ln(L) = 0$;

préciser la valeur de L

Partie B : *Etude de la fonction f_n*

1- a) En posant : $t = \dfrac{n}{x}$; montrer que $f_n(x) = f_n(\dfrac{n}{t}) = \dfrac{\ln(n)}{e^t} - \dfrac{\ln(t)}{t} \times \dfrac{1}{\dfrac{e^t}{t}}$.

b) En déduire que f_n est continue en 0.

2- a) Sachant que $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\ln(n)}{\dfrac{e^t}{t}} - \dfrac{\ln(t)}{t} \times \dfrac{1}{\dfrac{e^t}{t^2}}\right]$ avec $t = \dfrac{n}{x}$;

Etudier la dérivabilité de la fonction f_n en 0

b) Interpréter graphiquement le résultat.

3- a) Calculer la limite f_n en $+\infty$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

4- a) Montrer que $\forall\ x \succ 0$ et $n \in \mathrm{IN}^*$; $f'_n(x) = \dfrac{e^{-\frac{n}{x}}}{x^2} \times [g_n(x)]$ où g_n est la fonction définie dans la partie ***A***.

b) Dresser le tableau de variation de f_n .

5- a) Montrer que $\forall x \succ 0$ et $n \in IN^*$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} \ln(x)\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)$.

b) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on déterminera les coordonnées.

c) Etudier la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n) .

6) Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie C : *Etude d'une suite intégrale*

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n = \displaystyle\int_1^2 f_n(x)\,dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $U_0 = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$.

2) Montrer que $\forall x \succ 0$ et $n \in IN$; $e^{-n} \ln(x) \le f_n(x) \le e^{-\frac{n}{2}} \ln(x)$.

3) En déduire que $\forall n \in IN$; $e^{-n} U_0 \le U_n \le e^{-\frac{n}{2}} U_0$.

4) Justifier que la suite (U_n) converge vers 0 .